4. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 14 Q, Sommer 2025

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 4.1 Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz oder bestimmte Divergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{n^3}{2^n} + \frac{15n^2 - 7}{3n^2 + 10n}\ , \qquad b_n = \frac{\sqrt[n]{3}\ n}{2n-1}\ , \qquad c_n = \frac{n^3}{3n^2-1} - \frac{2n^2-3}{4n+1}\ , \qquad d_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

Aufgabe 4.2 Zeigen Sie, dass für je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \;=\; \max\{a, b\}$$

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt für je endlich viele $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 4.3 Zeigen Sie: folgende Folge $(a_n)_n$ konvergiert und hat den Grenzwert $\frac{1}{2}$.

$$a_n \;=\; \sqrt{n^2 + n} - n$$

Hinweis: Umformen nach dem Schema $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x+y}$.

Aufgabe 4.4 Untersuchen Sie folgende Folge $(a_n)_n$ auf Monotonie und Beschränktheit.

$$a_n \;=\; \frac{3n+2}{n+5}$$

Aufgabe 4.5 *(Schnelle Quadratwurzelberechnung)* Seien $d,\, a_o > 0$ reelle Zahlen und $(a_n)_n$ die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{d}{a_n}\Big) \qquad \text{für } n \geq 0\,.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend und beschränkt, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \sqrt{d}$$

Hinweis: Sollten Sie die Ungleichung $d \leq a_n^2$ brauchen, drücken Sie a_n durch a_{n-1} aus.

Bemerkungen. 1) Falls $a_o < \sqrt{d}$, so gilt $a_1 > a_o$; daher gilt die Monotonie erst ab $n \geq 1$.

2) Sind $d,\, a_o \in \mathbb{Q}$, so sind alle $a_n \in \mathbb{Q}$ und haben oft viel kleinere Nenner als gleich gut approximierende Dezimalbrüche; machen Sie einen Test mit $d = a_o = 2$ und $n = 1, 2, 3$.